

Modelo Fraccional de la visco-elasticidad de una Gelatina

Por: EDGAR IVÁN HINOJOSA SALDAÑA y ALBERTO PAULO
 MÉNDEZ - D E T T M E R M UÑO Z*, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León, Av. Universidad s/n. Ciudad Universitaria San Nicolás de los Garza, C.P. 66451, Nuevo León, México
 (Manuscrito recibido el 28 de noviembre de 2025; en forma final el 28 de noviembre de 2025)

RESUMEN

La visco-elasticidad es una propiedad que cuando es estudiada en fluidos newtonianos generalizados, viene acompañada de propiedades como la memoria, o leyes de potencia para su módulo de relajación. Es así que motivados por modelos de autosemejanza en analogía a la estructura molecular de la gelatina, proponemos un modelo fraccional para su comportamiento dinámico y su respuesta a la variación de frecuencia. Para ello se da un repaso teórico de los fundamentos necesarios para sostener la teoría. Los resultados estimados de la prueba dinámica por el modelo fraccional son muy similares a los del modelo ordinario. Se concluye con un análisis de las frecuencias.

Palabras clave: Viscoelasticidad, Gelatina, cálculo fraccional, autosemejanza

1. Introducción

La derivada fraccional tanto de Riemann-Liouville como de Caputo han sido utilizadas para modelar empíricamente la relación entre esfuerzo y deformación de fluidos viscoelásticos lineales. Pero es sobretodo su habilidad de modelar fenómenos hereditarios de memoria a largo plazo. Durante la primera mitad del siglo XX se utilizó la derivada fraccional tanto explícita como implícitamente, ya sea para modelar las leyes de potencias temporales que describían a los tiempos de relajación o su comportamiento hereditario Caputo en 1967 utilizó la derivada que lleva su nombre para modelar la disipación en sismología y metalurgia. Como veremos más adelante

2. Marco Teórico

2.1. Estructura interna de la gelatina

La gelatina está compuesta de colágeno, más específicamente, colágeno gelatinizado.

El colágeno es una estructura común en los seres vivos, que está compuesto principalmente por los aminoácidos glicina, prolina y lisina, los cuales se reorganizan en cadenas, y se enrollan en una triple hélice.

Al gelatinizarse, la estructura de triple hélice se rompe, proceso al que se le denomina gelatinización, resultando en gelatina. Ésto comúnmente se realiza con calor, o enzimas, por lo que queda parcialmente hidrolizado, igualmente.

Cuando se disuelve en agua, se convierte en un *sol*, o una

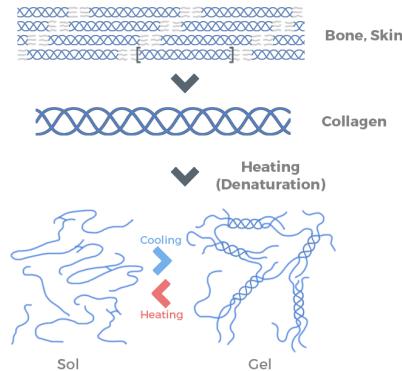


Fig. 1. Estructura interna de la gelatina, mostrando como se comportan las cadenas del colágeno en su estado de *sol* y su estado de *gel*

dispersión coloidal fluida, pues las cadenas que lo componen se suspenden en el agua sin ligarse permanentemente. Al volverse a enfriar, algunas cadenas van a volverse a asociar, formando zonas con la estructura de la triple hélice, aunque con una alta hidratación, formando puentes de hidrógeno entre los grupos

* Autor correspondiente.
 e-mail: antonio.sosaa@uanl.edu.mx

C=O, y N-H de las cadenas, y también con las moléculas de agua, y así se forma una red a lo largo de todo el volumen, llegando a un estado de *gel*. La cantidad de agua que se queda en las cadenas es lo que le da su elasticidad.

Éste arreglo es amorfo, siendo transparente solamente porque las triples hélices suelen tener tamaños de 2–10nm, y no dispersan luz. Igualmente, el índice de refracción del agua $n \approx 1,33$ y el colágeno gelatinizado $n \approx 1,34$ son muy similares, lo cual igualmente contribuye a que no haya dispersión en dominios internos.

2.2. Fluidos Newtonianos Generalizados

En un fluido ideal sin fuerzas aplicadas externas, el flujo de densidad de momento está dado por

$$\Pi_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij} \quad (1)$$

$$\mathbf{\Pi} = \rho \mathbf{v} \mathbf{v}^T + p \mathbf{1} \quad (2)$$

de tal modo que de la ecuación $\partial_i \Pi_{ij}$ recuperamos la ecuación de balance de momento.

Para un fluido de Navier Stokes, se le ha agregado un término de viscosidad,

$$\Pi_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (3)$$

del que suponemos es lineal con las derivadas de la velocidad

$$\sigma_{ij} = -\eta (\partial_j v_i + \partial_i v_j) \quad (4)$$

$$= -\mu (\partial_j v_i + \partial_i v_j) \quad (5)$$

$$\sigma = -2\mu \dot{\epsilon} \quad (6)$$

del último renglón tenemos la Ley de Viscosidad de Newton que establece una proporcionalidad entre el tensor de esfuerzos viscosos τ y el tensor de rapidez de deformación $\dot{\epsilon}$

$$\tau_{12} = 2\mu \dot{\epsilon}_{12} \quad (7)$$

Una viscosidad aún más general es la de Reiner-Rivlin de la forma

$$\sigma = g(I_2, I_3) \dot{\epsilon} + h(I_2, I_3) \dot{\epsilon}^2 \quad (8)$$

donde I_i son los invariantes principales del tensor de rapidez de deformación. Esta forma de fluido generalizado necesariamente para un fluido incompresible una traza nula, además de que sus esfuerzos normales sean distintos $\sigma_{xy} \neq \sigma_{yx}$ invita a la posibilidad de fluidos con memoria o reológicos.

2.3. Elasticidad y Viscosidad

En 1678 Hooke dió su ley homónima de proporcionalidad de esfuerzo y deformación, "Ut tensio sic vis; el poder de cualquier resorte está en la misma proporción que su tensión". El esfuerzo de relajación es proporcional a la deformación del material

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \sigma(t) \quad (9)$$

$$= \int_0^t J(t-\tau) d\sigma(\tau) \quad (10)$$

$$= \int_0^t \frac{1}{E} d\sigma(\tau). \quad (11)$$

donde σ es el esfuerzo y ε la deformación, $J(t) = \frac{1}{E}$ es el modulo de fluencia.

El modelo de Newton de viscosidad nos dice que

$$\sigma(t) = \mu \dot{\epsilon}(t) \quad (12)$$

$$= \int_0^t G(t-\tau) d\varepsilon(\tau) \quad (13)$$

$$= \varepsilon(0^+) G(t) + \int_0^t G(t-\tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \quad (14)$$

$$= \mu \epsilon(0^+) \delta(t) + \int_0^t \delta(t-\tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \quad (15)$$

$$= \mu \epsilon(0^+) \delta(t) + \mu \dot{\epsilon}(t) \quad (16)$$

La consideración de respuesta instantánea del fluido a cambios en la taza de deformación es incorrecta para líquidos de alto peso molecular, como los polímeros, en los que su respuesta al esfuerzo es similar a la de un sólido elástico.

Es por ello que se les ha llamado como fluidos visco-elásticos. Pueden ser modelados bajo la consideración de combinaciones de resortes lineales elásticos y amortiguadores lineales.

El **Modelo de Maxwell** es un resorte y un amortiguador ensamblados en serie. El esfuerzo aplicado es el mismo para cada elemento, y la deformación es aditiva. Si una deformación es aplicada al modelo, el esfuerzo incrementa al máximo para luego relajarse a cero. De ser aplicado una deformación constante, el esfuerzo incrementa a un máximo para luego relajarse exponencialmente.

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \quad (17)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (18)$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 \quad (19)$$

$$= \mu \sigma + \frac{1}{E} \dot{\sigma} \quad (20)$$

$$\Rightarrow \sigma(t) = \int_0^t \frac{\mu}{\tau_\sigma} e^{-\frac{t-\tau}{\tau_\sigma}} \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \quad (21)$$

con $\tau_\sigma = \frac{1}{\mu E}$

$$\mathcal{L}\{\hat{\xi}\} = S\hat{\xi}(s) = \mu s \hat{\sigma} + \frac{1}{E} S \hat{\sigma}(s) \quad (22)$$

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-\tau) \dot{\xi} d\tau = G * \hat{\xi} \quad (23)$$

$$\mathcal{L}\{\sigma\} = \hat{\sigma} = G s \hat{\xi} \quad (24)$$

$$S \hat{\xi} = \left(\mu s + \frac{1}{E} S \right) \hat{\sigma} \quad (25)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{S \hat{\xi}}{\mu s + \frac{1}{E} S} = \frac{1}{\mu + \frac{1}{E} s} \hat{\xi} \quad (26)$$

$$\hat{G} = \frac{\hat{\sigma}}{s \hat{\xi}} = \frac{1}{\mu s + \frac{1}{E} s^2} = \frac{1}{s(\mu + \frac{1}{E} s)} \quad (27)$$

$$= \frac{E}{\mu Es + s^2} = \frac{E}{s(\mu E + s)} \quad (28)$$

$$G(t) = Ee^{-\mu Et} \quad (29)$$

El Modelo de Kelvin consiste en un resorte y un amortiguador en paralelo. La deformación es la misma para cada elemento y el esfuerzo aplicado es aditivo.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (30)$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (31)$$

$$\sigma = E\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon} \quad (32)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t) = \int_0^t \frac{1}{E} (1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau_\varepsilon}}) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (33)$$

$$\sigma = E\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon} \quad (34)$$

$$\hat{\sigma} = E\hat{\varepsilon} + \mu s\hat{\varepsilon} \quad (35)$$

$$\epsilon(t) = \int_0^t J(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau = J * \dot{\sigma} \quad (36)$$

$$\hat{\varepsilon} = \hat{J}s\hat{\sigma} \quad (37)$$

$$\hat{J} = \frac{\hat{\varepsilon}}{s\hat{\sigma}} \quad (38)$$

$$\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\sigma}} = \frac{1}{E + \mu s} \quad (39)$$

$$\frac{\hat{\varepsilon}}{s\hat{\sigma}} = \frac{1}{Es + \mu s^2} \quad (40)$$

$$\hat{J} = \frac{1}{Es + \mu s^2} = \frac{1}{s(E + \mu s)} \quad (41)$$

$$\hat{J} = \frac{1}{Es} - \frac{1}{E} \left(\frac{1}{\frac{E}{\mu} + s} \right) \quad (42)$$

$$J(t) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\mu} t} \right) \quad (43)$$

$$\text{con } \tau_\varepsilon = \frac{\mu}{E}$$

2.4. Escalera Fractal

Retomemos la definición del esfuerzo en términos del módulo de relajación

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (44)$$

$$= G * \dot{\varepsilon} \quad (45)$$

entonces podemos hacer la transformada de Laplace y aplicar el teorema de convolución al igual que en los modelos pasados

$$\hat{\sigma}(s) = \hat{G}(s) s \hat{\varepsilon}(s) \quad (46)$$

Introducimos un modelo análogo al visto en clase y que puede consultarse en Kelly y McGough, 2009, proponiendo la componente equivalente a la totalidad de la red infinita de tal modo que

$$\hat{\sigma} = L_{eq}\hat{\varepsilon} \Rightarrow \hat{G} = \frac{L_{eq}}{s} \quad (47)$$

$$L_{eq} = L_1 + \frac{1}{L_2 + \frac{1}{L_{eq}}} \quad (48)$$

$$L_{eq} = L_1 + \frac{L_2 \cdot L_{eq}}{L_2 + L_{eq}} \quad (49)$$

$$L_{eq}(L_2 + L_{eq}) = L_1(L_2 + L_{eq}) + L_2 L_{eq} \quad (50)$$

Resolviendo para L_{eq} tenemos

$$L_{eq} = -\frac{\mu s}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\mu s)^2 - 4\mu s E} \sim \sqrt{\mu E s} \quad (51)$$

$$\hat{G} = \sqrt{\frac{\mu E}{s}} \quad (52)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{G\} = \frac{\sqrt{\mu E}}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right)} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{s^{1 - \frac{1}{2}}}\right\} \quad (53)$$

$$G(t) = \frac{\sqrt{\mu E}}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right)} t^{1/2} \quad (54)$$

al sustituirlo en la expresión (??) tenemos que

$$\sigma(t) = \int_0^t \frac{\sqrt{\mu E}}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right)} (t - \tau)^{1/2} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (55)$$

$$= \sqrt{\mu E} C \partial_t^{1/2} \varepsilon(t) \quad (56)$$

2.5. Reo-metro de torsión

En el arreglo experimental presentado en la siguiente sección se trabaja con un péndulo de torsión visco-elástico. Pensando a la deformación como $\varepsilon = R\theta$ y a la torca como $\tau \propto \sigma$, en un modelo de Kelvin-Voigt, tenemos lo siguiente

$$\tau = -\kappa\theta - \beta \frac{d\theta}{dt} \quad (57)$$

que de acuerdo con la segunda ley de newton del momento angular se tiene la siguiente ecuación

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\beta}{I} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0, \quad (58)$$

asumiendo como condición inicial que parte del reposo $\dot{\theta}(0) = 0$ en una posición θ_0 , podemos llegar a la siguiente solución

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{\beta}{2I}t} \cos(\omega t) \quad (59)$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I} - (\frac{\beta}{2I})^2}$. Precisamente se cumple la siguiente relación Asp et al., 2022

$$\tau(t) = \frac{\pi R^3}{2} \sigma(t) \quad (60)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{R\theta(t)}{h} \quad (61)$$

$$\Rightarrow \tau(t) = -\frac{\pi E R^4}{2h} \theta(t) - \frac{\pi \mu R^4}{2h} \dot{\theta}(t) \quad (62)$$

es decir $\kappa = \frac{\pi E R^4}{2h}$ y $\beta = \frac{\pi \mu R^4}{2h}$. Suponiendo una relación funcional entre la deformación y el esfuerzo como en (55), tenemos una torca distinta

$$\sigma(t) = (\mu E)^\alpha \partial_t^\alpha \varepsilon(t) \quad (63)$$

podemos reescalar para obtener la torca y el ángulo.

$$\tau(t) = \frac{\pi R^4}{2h} (\mu E)^\alpha \partial_t^\alpha \theta(t) \quad (64)$$

cuya ecuación de Newton es de la siguiente forma

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\gamma}{I} \partial_t^\alpha \theta = 0 \quad (65)$$

donde $\gamma = \frac{\pi R^4}{2h} (\mu E)^\alpha$ que tiene como solución

$$\theta(t) = \theta_0 E_{2-\alpha}(-\frac{\gamma}{I} t^{2-\alpha}) \quad (66)$$

$$\tau(t) = \gamma \theta_0 t^{2-\alpha} E_{2-\alpha}(-\frac{\gamma}{I} t^{2-\alpha}) \quad (67)$$

Así mismo es posible plantear otra ecuación dinámica fraccional que incluya en el segundo orden una α también

$$\partial_t^{2\alpha} \theta + \frac{\mu}{I} \partial_t^\alpha \theta = 0 \quad (68)$$

de solución

$$\theta(t) = \theta_0 E_\alpha(-\frac{\mu}{I} t^\alpha) \quad (69)$$

$$\tau(t) = \theta_0 t^{-\alpha} E_{\alpha,1-\alpha}(-\frac{\mu}{I} t^\alpha) \quad (70)$$

3. Materiales y método

3.1. Materiales

- Sensor de rotación
- Amplificador de señales
- Generador de funciones
- Osciloscopio
- Dos polarizadores
- Porta lentes
- Motor con caja reductora (3kgm de torca)
- Microcontrolador
- Laptop con lectura serial
- Gelatina cristalina
- Bases, postes y soportes
- Cámara de teléfono
- Fuente de luz monocromática
- Lente con distancia focal de 15 mm
- Difuminador de luz

Un diagrama esquemático del arreglo experimental se muestra en la figura 2.

3.2. Método

Se preparó gelatina disolviendo un sobre de grenaña cristalina en agua caliente, con una razón de 1:8 y otra de 1:5. Posteriormente se dejó enfriar en el refrigerador, y se sacó para que llegase a temperatura ambiente.

Se montó una fuente de luz blanca LED, seguido de una lente biconvexa de manera que el LED estuviera en su punto focal. Delante de la lente se puso un filtro de polarización lineal. Dejando suficiente distancia para colocar el reómetro, se puso otro filtro de polarización lineal, cuidando que su eje de transmisión fuera perpendicular al primero (que no dejase pasar nada de luz).

Finalmente, se coloca el reómetro en medio del arreglo.

Para tomar la muestra de fotoelasticidad, se utilizó un cubo de

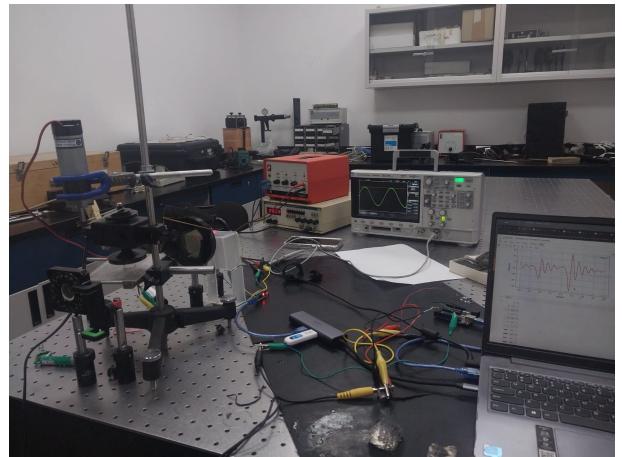


Fig. 2. Foto del arreglo experimental.

gelatina. Se alinea en el reómetro de manera que el haz pasara por el centro del cubo. Se cerró el reómetro, cuidando de que solamente hiciera contacto con la gelatina, sin deformarla, y se le dió un ángulo inicial al disco, desde donde se dejó oscilar hasta que se amortiguara por completo.

Para la muestra de respuesta a frecuencias, se utilizó un cilindro de gelatina, ajustando el reómetro de igual manera que antes. Se hizo oscilar el motor a un voltaje sinusoidal, procedente de un generador de señales amplificado. La frecuencia se midió con un osciloscopio conectado al motor. Se fue variando la frecuencia, en incrementos convenientes, llegando a una frecuencia dada, y dejando al sistema oscilar por un momento antes de pasar a la siguiente.

4. Resultados

Para la muestra de respuesta a frecuencias, se obtuvo el movimiento de la figura 3, en donde podemos ver la variación escalonada de la frecuencia de entrada, y la amplitud del movimiento que genera.

Más aún, a partir de ésto, podemos ver que el la respuesta del sistema ante un impulso sería como en la figura 4, donde se ve que de $\sim 8 - 10$ Hz hay una resonancia muy marcada en el sistema. Ésto igual se puede apreciar en la figura 3, durante el tiempo en donde se ensancha la gráfica inferior.

La incertidumbre experimental del sensor de movimiento angular es de $0,5grad$. Para propagar el error se tomo la desviación estándar de la observación en cierta ventana de tiempo. Se realizó un ajuste de mínimos cuadrados guiados con primeras suposiciones de los parámetros con base en regresiones logarítmicas y análisis de Fourier.

5. Discusión

Posterior al análisis de fotoelasticidad, con los parámetros obtenidos, se simuló la respuesta a un impulso de nuestro sistema de acuerdo a la función de transferencia de nuestro modelo,

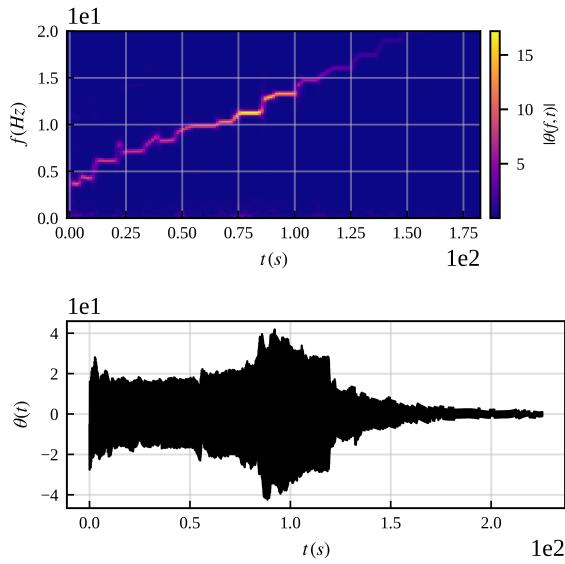


Fig. 3. Gráfica de los datos obtenidos en la toma de la muestra de respuesta a frecuencias, en la parte superior se encuentra el espectrograma de las oscilaciones, y en la parte inferior el movimiento de la muestra.

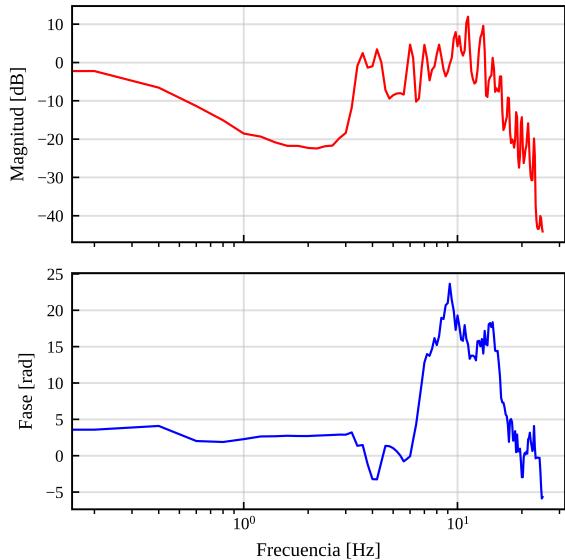


Fig. 4. Gráfica de la respuesta ante un impulso del sistema (diagrama de Bode) de acuerdo a los datos obtenidos en el experimento.

obteniendo la figura 6, que como podemos ver, difiere significativamente de lo

Existe una gran diferencia en el esfuerzo de respuesta ante la deformación entre ambos modelos, ya que el esfuerzo inicial del clásico es acotado, mientras que en el caso fraccional se in-

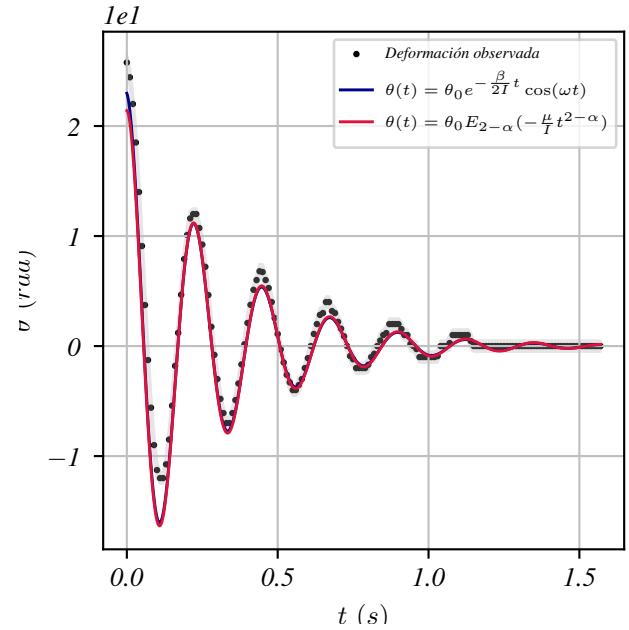


Fig. 5. Gráfica de ajustes tanto del modelo clásico como el fraccional, los cuales se sobreponen. Además se muestran las observaciones con su error propagado.

Tabla 1. Parámetros estimados con sus incertidumbres en juego de mediciones presentado.

Parámetro	Modelo ordinario	Modelo fraccional
θ_0 [rad]	22,9(7)	21,40
$\frac{\beta}{2T}$ [Hz], $\frac{\gamma}{T}$ [$m^{\frac{3}{2}-4\alpha} N^{2\alpha} s^\alpha$]	3,2(1)	501(11)
ω [Hz], α	27,8(1)	0,13

determina. Esto puede indicar como se mencionó anteriormente que al ser un fluido newtoniano generalizado su respuesta ante la deformación no es instantánea.

6. Conclusiones

El trabajo presenta un ejercicio de modelaje fraccional apoyado en tópicos vistos a lo largo del curso como lo son el oscilador armónico fraccional y el análisis de redes autosemejantes. Sin embargo no podemos asegurar con certeza que el modelo propuesto presente alguna ventaja encima de los ya existentes.

Referencias

- Asp, Merrill et al. (dic. de 2022). «A Torsion-Based Rheometer for Measuring Viscoelastic Material Properties». en: *The Biophysicist* 3.2, págs. 94-105. ISSN: 2578-6970. DOI: 10 . 35459 / tbp . 2020 . 000172. URL: <https://doi.org/10.35459/tbp.2020.000172>

Tabla 2. Raíz de error cuadrático medio de ambos ajustes.

	Modelo ordinario	Modelo fraccional
RMSE	1,48	1,62

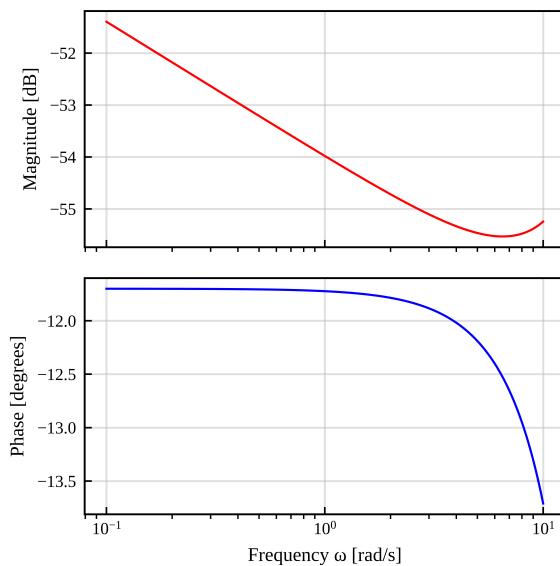


Fig. 6. Gráfica de la respuesta ante un impulso del sistema (diagrama de Bode) de acuerdo al modelo propuesto, con los parámetros obtenidos a partir de la fotoelastidad.

thebiophysicist.kglmeridian.com/view/journals/biop/3/2/article-p94.xml (visitado 25-11-2025).

Franck, A (s.f.). «Viscoelasticity and dynamic mechanical testing». en: En: () .

Herrmann, R. (2011). *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists*. G - Reference,Information and Interdisciplinary Subjects Series. World Scientific. ISBN: 978-981-4340-24-3. URL: <https://books.google.com/books?id=mPXzp1f7ycMC>.

Kelly, James F. y Robert J. McGough (oct. de 2009). «Fractal ladder models and power law wave equations». en: En: *The Journal of the Acoustical Society of America* 126.4, págs. 2072-2081. ISSN: 0001-4966, 1520-8524. DOI: 10.1121/1.3204304. URL: <https://pubs.aip.org/jasa/article/126/4/2072/616846/Fractal-ladder-models-and-power-law-wave-equations> (visitado 23-11-2025).

Mainardi, Francesco (dic. de 2012). «An Historical Perspective on Fractional Calculus in Linear Viscoelasticity». en: En: *Fractional Calculus and Applied Analysis* 15.4. arXiv:1007.2959 [math], págs. 712-717. ISSN: 1311-0454, 1314-2224. DOI: 10.2478/s13540-012-0048-6. URL: <http://arxiv.org/abs/1007.2959> (visitado 24-11-2025).

Mainardi, Francesco y Giorgio Spada (mar. de 2011). «Creep, Relaxation and Viscosity Properties for Basic Fractional Models in Rheology». en: En: *The European Physical Journal Special Topics* 193.1. arXiv:1110.3400 [cond-mat], págs. 133-160. ISSN: 1951-6355, 1951-6401. DOI: 10.1140/epjst/e2011-01387-1. URL: <http://arxiv.org/abs/1110.3400> (visitado 24-11-2025).