



## Geometría Simpléctica en Mecánica Clásica *Manuscrito*

Edgar Iván Hinojosa Saldaña<sup>1</sup>, M.C. Jose Abraham Barajas Aguilar<sup>2</sup>,

**Resumen:** Indagamos en las riquezas estructurales del espacio fase, sobre las cuales descansa la mecánica clásica conocida. Antes de ello daremos un breve repaso a resultados matemáticos que utilizaremos en el desarrollo de resultados más importantes. Motivaremos físicamente la propuesta de la estructura simpléctica en mecánica clásica. Para terminar daremos un ejemplo de la resolución de un problema usando estas herramientas.

Un sistema mecánico es un conjunto de partículas, interacciones, observables y restricciones. Al tener conocimiento de las expresiones matemáticas de éstas podemos calcular una solución revisando los principios que nos ofrece la mecánica clásica. Existen varios puntos de partida con diferentes alcances, propondremos uno que motive tacitamente la estructura inherente del espacio fase.

El espacio de configuración  $Q$  de un sistema mecánico es el conjunto de todas las configuraciones espaciales posibles. Por lo cuál posee una caracterización del sistema meramente cinética y no dinámica. A este mismo buscamos realizar un mapa de todos los puntos del conjunto a los reales de manera inequívoca. Necesitamos que nuestras observables sean real valuadas y continuas, dado que experimentalmente deseamos que para toda precisión arbitraria en la medición de la configuración de la partícula exista una precisión en la observable. Así mismo deseamos que sean diferenciables porque pretendemos hallar las relaciones entre los pequeños cambios que hagamos en la configuración de la partícula y los pequeños cambios que existan en las observables.

Por todas estas razones montamos una estructura de variedad diferenciable en el sistema mecánico. Sin embargo no es sólo éste ecosistema tan fructífero de matemáticas la motivación de esta decisión, sino también su filosofía. La filosofía del uso de variedades es uno de pasividad, esto es, estudiamos al conjunto como si realmente existiera físicamente a través de cartas, y toda transformación de estas no es una transformación a la realidad sino a la manera en que la expresamos. Así toda propiedad que sea independiente de estas cartas es inherente al fenómeno físico.

Al montar la estructura de variedad nos da acceso a otro espacio, el haz cotangente de  $Q$ , que es el conocido espacio fase. Antes de indagar en él y su estructura

veremos algunos resultados matemáticos de utilidad.

### 1. Preliminares Matemáticos

Primero ahondaremos en propiedades de la geometría, después de campos vectoriales y sus derivadas de Lie.

#### 1.1. Geometría

Nos interesa saber como cambia una observable  $f$  conforme al cambiar la configuración de una partícula. Pensemos a dicho cambio en la localidad de una configuración  $p$  de la partícula, tal que el cambio es parametrizado con una curva  $c(t)$ . En virtud de que tenemos un mapa de todas las vecindades de las configuraciones podemos rastrear los puntos recorridos y ver el desplazamiento virtual tomado  $v$ . Sea  $f$  una observable del sistema, por regla de la cadena

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} f \circ c(t) = v^i \partial_{q^i} \Big|_p f = L_v f$$

el número  $L_v f$  arrojado nos dice el cambio de la observable en la localidad de una configuración hacia cierta dirección y la llamamos la derivada de Lie aplicada en  $f$  con respecto a  $v$  en el punto  $p$ .

Notemos que no dimos ninguna información en particular acerca de la función ni de la curva (pensando en que localmente una curva es igual a otra en tanto que tengan la misma derivada y valor en  $p$ ), podemos ignorarlas y examinar a

$$L_v = v^i \partial_{q^i} \Big|_p$$

qué tal si pensamos en el conjunto de todos estos operadores definidos en la localidad de una configuración  $p$ . Rápidamente notamos que al poder localizar cada

<sup>1</sup>2086053

<sup>2</sup>

operador con vector en  $\mathbb{R}^n$  este espacio de operadores es una variedad, pero más importante aún, si también es un espacio vectorial.

Para ello nuevamente cambiemos nuestra perspectiva, dejemos fija la función y el punto, y veamos a  $L_v$  como una aplicación que toma vectores  $L_v$  y retorna operadores  $\partial_{q^i}|_p$

$$\begin{aligned} L_v f + L_w f &= v^i \partial_{q^i}|_p + w^i \partial_{q^i}|_p \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} f \circ c(t) + \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} f \circ s(t) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} f \circ c(t) + f \circ s(t) \\ &= (v^i + w^i) \partial_{q^i}|_p \\ &= L_{v+w} f \end{aligned}$$

esto es prácticamente heredado de la derivada ordinaria, similarmente la distributividad de escalares, siguiendo con nuestro planteamiento tenemos

**Teorema 1.1.** *El conjunto de los operadores de las derivadas direccionales  $\partial_{q^i}|_p$  es un espacio vectorial y es isomorfo a  $\mathbb{R}^n$  dado  $L_v$ .*

**Dem. 1.1.1.** *Hemos notado la linealidad de  $L_v$ , por tanto el espacio en cuestión posee un neutro y un inverso aditivo. Véamos ahora que es no degenerado,  $L_0 = 0$  y si  $L_v = 0$  necesariamente  $v = 0$  de otro modo toda observable debe de ser constante, cosa que en general no sucede.*

Al espacio vectorial anterior le llamamos espacio tangente en un punto  $p \in T_p M$  lo largo de. El espacio cotangente en  $p \in T_p^* Q$  es el espacio dual a  $T_p Q$  y sus elementos son de la forma

$$v_i dq^i|_p$$

esto dado que

$$v_i dq^i|_p (v^j \partial_{q^j}) = v^i v_j dq^i(\partial_{q^j}) = v^i v_j \delta_j^i = v^i v_i$$

dado el isomorfismo canónico de las bases. Si existiera una manera de asignar unas componentes con las otras, esto es un tensor métrico, podríamos calcular  $v_j = g_{ji} v_i$  entonces tenemos  $g_{ij} v^i v^j$ . Esto es el módulo de la velocidad, usualmente se considera a la velocidad como algo que existe físicamente, así es tentativo decir que  $v^i$  son las componentes contravariantes y  $v_i$  son sus componentes covariantes, aunque por supuesto son componentes de objetos que viven en distintos espacios. En mecánica también a las últimas se les llama variables conjugadas de las primeras.

La unión disjunta, la que realiza una distinción a través de una etiqueta de cada punto,  $T^*Q = \cup_{p \in Q} T_p^*Q$  es el espacio fase, el espacio de todos los estados. Más adelante veremos porque es importante definir un estado como un Del espacio fase podemos recuperar el espacio de configuración por medio de una proyección  $\pi : T^*Q \rightarrow Q$

## 1.2. Campos Vectoriales y flujo

Podemos describir la trayectoria de una partícula por medio de un campo vectorial  $X_H$  en donde sus curvas integrales son las trayectorias de las partículas en términos de sus coordenadas fase.

Un campo vectorial es una asignación suave un vectores tangente a cada punto de la variedad, esto es  $X : T^*Q \rightarrow T(T^*Q)$ . En una vecindad de algun punto arbitrario de  $T^*Q$  un campo vectorial es de la forma

$$X(p) = X^i \partial_{q^i}|_p + X_i \partial_{p^i}|_p.$$

Pensemos en la curva  $c(t)$  tal que su derivada coincida con un campo vectorial  $X$

**Definición 1.1.** *Una curva integral  $x(t)$  de  $X$  es una curva en  $T^*Q$  tal que los vectores tangentes de  $x(t)$  son exactamente  $X|_{x(t)}$*

Para llegar a esta curva es necesario resolverla en alguna carta, para ello nos concentramos en algun abierto donde  $x^\mu$  es la  $\mu$ -ésima coordenada de la imagen de la curva en la variedad

$$\frac{dx^\mu}{dt}(t) = X^\mu(t)$$

Una pregunta viene al ver esta ecuación diferencial, y es si existe una curva integral para algun campo definida para todo el tiempo. La respuesta es que sí para variedades compactas y sin frontera dado el teorema de recurrencia de Picard.

Sea  $\sigma(t, x_0)$  una curva integral  $X \in \mathcal{X}(M)$  pasando por  $x$  en  $t_0$ . Siendo  $\sigma^\mu(t, x_0)$  las coordenadas

$$\frac{d}{dt} \sigma^\mu(t, x_0) = X^\mu(\sigma(t, x_0))$$

sujeta a  $\sigma^\mu(t_0, x_0) = x_0^\mu$

Esta aplicación  $\sigma : R \times M \rightarrow M$  es llamada el flujo generado por  $X \in \mathcal{X}(M)$  y satisface

$$\sigma(t, \sigma(s, x_0)) = \sigma(t+s, x_0)$$

si uno fluye desde un punto al cuál ya habías fluido, esto es lo mismo que haber fluido sin parar el mismo tiempo total.

**Dem. 1.1.2.**

$$\frac{d}{dt} \sigma^\mu(t, \sigma(s, x_0)) = X^\mu(\sigma(t, \sigma(s, x_0)))$$

tal que

$$\sigma(0, \sigma(s, x_0)) = \sigma(s, x_0)$$

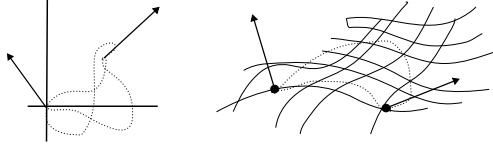
Esta es una ecuación diferencial ordinaria con valor inicial, y se puede escribir

$$\frac{d}{dt} \sigma^\mu(t+s, x_0) = \frac{d}{d(t+s)} \sigma^\mu(t+s, x_0) = X^\mu(\sigma(t+s, x_0))$$

por unicidad y existencia tienen que ser la misma para una  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$

### 1.3. Derivadas de Lie

Deseamos en física comparar objetos y sus cambios, a diferencia de los números reales en una variedad no queda demasiado claro como comparar todos los objetos asociados a dos distintos puntos, por ejemplo vectores, covectores o tensores de orden superior.



#### Bosquejo de la derivada de Lie

En el caso plano euclideo podemos mover objetos de un punto a otro indiscriminadamente de cuál fue el trayecto tomado, caso que no es en la variedad. En la que ni siquiera existe una forma canónica de hacerlo, amenos de que tengamos una noción de transporte paralelo como lo es en la estructura Riemanniana, pero no tenemos esa estructura en el espacio fase. Esto nos deja con la noción de otra derivada. Necesitamos algo que tome dos campos vectoriales  $X$  y  $Y$ , donde  $Y$  es un campo de referencia.

Sean  $\sigma(t, x)$ ,  $\tau(t, x)$  dos flujos generados por  $X$  y  $Y$  (resp.)

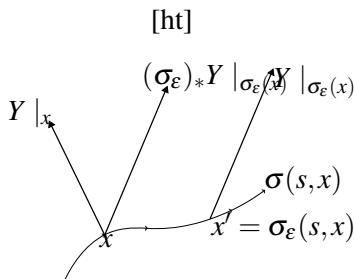
$$\frac{d\sigma_s^\mu}{ds} = X^\mu(\sigma_s(x))$$

$$\frac{d\tau_t^\mu}{dt} = Y^\mu(\tau_t(x))$$

definimos la derivada del vector  $Y$  a lo largo de  $\sigma_s(x)$

1. Primero mapeamos  $Y|_{\sigma_\varepsilon(x)}$  a  $(TM)_x$  por  $(\sigma_\varepsilon)_*$ :  $(TM)_{\sigma_\varepsilon(x)} \rightarrow (TM)_x$
2. tomamos la diferencia entre  $(\sigma_\varepsilon)_*Y|_{\sigma_\varepsilon(x)}$  y  $Y|_x$
3. tomamos el límite

$$L_X Y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [(\sigma_\varepsilon)_*Y|_{\sigma_\varepsilon(x)} - Y|_x]$$



$$L_X Y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [(\sigma_\varepsilon)_*Y|_{\sigma_\varepsilon(x)} - Y|_x]$$

Lie derivative 2

Veamos como se ve en la localidad de una carta dado que necesitamos realizar calculos Sea una localidad con coordenadas  $x^\mu$  y sea  $X = X^\mu \partial_{x^\mu}$ ,  $Y = Y^\mu \partial_{x^\mu}$  la logica será expandir en primer orden los terminos, esto es tomaremos la parte afin de su variación infinitesimal

$$\sigma_\varepsilon(x) = x^\mu + X^\mu(x) + O(\varepsilon^2)$$

y

$$\sigma_{-\varepsilon}(x) = x^\mu - X^\mu(x) + O(\varepsilon^2)$$

sustituimos

$$Y|_{\sigma_\varepsilon(x)} = Y^\mu(x + \varepsilon X) \partial_{x^\mu}|_{\sigma_\varepsilon(x)}$$

expandimos en Taylor

$$Y^\mu(x + \varepsilon X) = Y^\mu(x) + \varepsilon \frac{\partial Y^\mu}{\partial x^\nu} X^\nu(x) + O(\varepsilon^2).$$

computemos el pushforward del elemento de la base

$$e_\mu|_{\sigma_\varepsilon(x)} \xrightarrow{(\sigma_{-\varepsilon})^*} e_\mu|_x??$$

si tenemos

$$\begin{aligned} (\sigma_{-\varepsilon})^*(z^\mu e_\mu|_{\sigma_\varepsilon(x)}) &= Z^\mu \frac{\sigma_\varepsilon^\nu(x)}{\partial x^\mu} e_\nu|_x \\ &= Z^\mu (\delta_\mu^\nu - \varepsilon \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}) e_\nu|_x. \end{aligned}$$

evaluemos el pushforward de  $\sigma$  en  $Y$

$$\begin{aligned} (\sigma_\varepsilon)_*Y|_{\sigma_\varepsilon(x)} &= [Y^\mu(x) + \varepsilon X^\nu(x) \partial_\nu Y^\mu(x)] \partial_\mu [x^\nu - \varepsilon X^\nu(x)] e_\nu|_x \\ &= Y^\mu(x) e_\mu|_x + \varepsilon [X^\mu(x) \partial_\mu Y^\nu(x) - Y^\mu(x) \partial_x X^\nu(x)] e_\nu|_x \end{aligned}$$

entonces

$$L_X Y = (X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu) e_\nu|_x$$

**Definición 1.2.** Sea  $X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  y  $Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in \mathcal{X}(M)$  entonces definimos el **Braquete de Lie**  $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$

$$[X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

para alguna observable  $f \in \mathcal{F}(M)$

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= \sum_{\mu, \nu} (X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} (Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} f) - Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} (X^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} f)) \\ &= \sum_{\mu, \nu} (X^\mu \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} - Y^\mu \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} + X^\mu Y^\nu \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} f - Y^\mu X^\nu \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} f) \\ &= (\mathcal{L}_X Y)f \end{aligned}$$

**Teorema** El braquete satisface las siguientes propiedades

1. bilinealidad  $[X_1, c_1 Y_1 + c_2 Y_2] = c_1 [X_1, Y_1] + c_2 [X_1, Y_2]$   $[c_1 X_1 + c_2 X_2, Y] = c_1 [X_1, Y] + c_2 [X_2, Y]$
2. antisimetría  $[X, Y] = -[Y, X]$
3. identidad de Jacobi  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

4.  $\mathcal{L}_{fX} = f[X, Y] - Y[f]X$
5.  $\mathcal{L}_X(fY) = f[X, Y] + X[f]Y$
6. sea  $f : M \rightarrow N$  entonces  $f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$

Qué mide físicamente el braquete de Lie? mide la conmutatividad de dos flujos. Más específicamente mide la diferencia entre dos flujos, infinitesimalmente, dado que en aspectos globales no tiene ningun sentido hablar de algebra entre puntos de la variedad. Tiene como resultado un vector, y cuándo este es nulo, tenemos que conmutan.

$$\tau^\mu(\delta, \sigma(\varepsilon, x)) - \sigma^\mu(\varepsilon, \tau(\delta, x)) = \varepsilon\delta([X, Y])^\mu + O(2, \varepsilon\delta)$$

y

$$L_X Y = 0 \leftrightarrow \sigma(s, \tau(t, x)) = \tau(t, \sigma(s, x))$$

#### 1.4. Derivada de Lie para formas

La definición pasado fue considerando elementos de un espacio vectorial especial, ahora son objetos de su dual donde no hay pushforwards, pero si pullbacks.

$$\mathcal{L}_X \omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [(\sigma_\varepsilon)^* \omega |_{\sigma_\varepsilon(x)} - \omega |_x]$$

en componentes  $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ , podemos ver que

$$(\sigma_\varepsilon)^* \omega |_{\sigma_\varepsilon(x)} = \omega_\mu(x) dx^\mu + \varepsilon [X^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \partial_\mu X^\nu \omega_\nu] dx^\mu$$

entonces

$$\mathcal{L}_X \omega = (X^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \partial_\mu X^\nu \omega_\nu) dx^\mu$$

Esto lo podemos generalizar a K-formas

**Definición 1.3.** La derivada de Lie de uuna  $k$ -forma  $\omega : \Omega^k(M)$  es

$$\mathcal{L}_X \omega = \frac{d}{dt} (\exp(tX))^* \omega |_{t=0}$$

**Proposición:** La derivada de Lie satisface

$$\mathcal{L}_X(t_1 + t_2) = \mathcal{L}_X t_1 + \mathcal{L}_X t_2$$

donde  $t_1$  y  $t_2$  son tensores del mismo tipo

$$\mathcal{L}_X(t_1 \otimes t_2) = (\mathcal{L}_X t_1) \otimes t_2 + t_1 \otimes (\mathcal{L}_X t_2)$$

para  $t_1$  y  $t_2$  arbitrarios.

#### 1.5. Producto Interior

Takes  $k$ -form  $\omega \in \Omega^k(M)$  and vector field  $X \in \mathcal{X}(M)$

$$i_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$$

defined as

$$(i_X \omega)(x_1, \dots, x_{k-1}) = \omega(X, x_1, \dots, x_{k-1}) \quad \forall x_1, \dots, x_{k-1}$$

and one is happy to defined because works when we want to generalize hamiltonean mechanics.

So we are going to explore some useful properties

Suppose  $\omega \in \Omega^k(M)$  let  $(U, \phi)$  be a chart with coords.  $\{x^k\}$

$$\omega = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k} \frac{1}{k!} \omega_{\mu_1, \dots, \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}$$

$$(i_X \omega) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} x^\mu \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} dx_2^\mu \wedge \dots \wedge dx^k$$

**Example:**  $M = \mathbb{R}^3$

$$1. \omega = dx^1 \wedge dx^2 \quad X = \frac{\partial}{\partial x^1} = e_1 \quad i_{e_1} \omega = dx^2$$

$$2. \omega = dx^1 \wedge dx^3 \quad x = \frac{\partial}{\partial x^3} = e_3 \quad i_x \omega = i_x(-dx^3 \wedge dx^1) = -dx^1$$

#### 1.6. Lie derivative

Let  $\omega \in \Omega^1(M)$

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in \mathcal{X}(M)$$

$$i_X \omega = \omega_\mu X^\mu$$

$$d(i_X \omega) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\omega_\mu x^\mu) dx^\nu$$

Now we evaluate

$$\begin{aligned} (i_X d)\omega &= i_X \left( \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^\nu \right) \\ &= i_X \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \omega_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu - \partial_\nu \omega_\mu dx^\mu \wedge dx^\nu) \right) \\ &= i_X \left( \frac{1}{2} \omega_\mu dx^\mu \wedge dx^\nu \right) \\ &= X^\nu \omega'_{\mu\nu} dx^\nu = (X^\mu \partial_\mu \omega_\nu - X^\mu \partial_\nu \omega_\mu) dx^\nu. \end{aligned}$$

So we have

$$(di_X + i_X d)\omega = (\partial_\nu (X^\mu \omega_\mu) + X^\mu \partial_\mu \omega_\nu - X^\mu \partial_\nu \omega_\mu) dx^\nu = ((\partial_\nu X^\mu) \omega_\mu + X^\mu \partial_\mu \omega_\nu) dx^\nu = \mathcal{L}_X \omega.$$

Actually this is for all  $\omega \in \Omega^k(M)$

$$(di_X + i_X d) = \mathcal{L}_X$$

**Exercice:** Let  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$   $\omega \in \Omega^k(M)$

1.  $i_{[X, Y]} = X(i_Y \omega) - Y(i_X \omega)$
2.  $i_X(\omega \wedge \nu) = (i_X \omega) \wedge \nu + (-1)^k \omega \wedge (i_X \nu)$
3. nilpotent  $i_X \circ i_X = 0$
4.  $i_X \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X i_X$

## 2. Mecánica Clásica

Pensemos en el siguiente postulado de la mecánica clásica, que es un replanteamiento de la primera ley

1. **Principio de Determinismo:** La trayectoria de una partícula dadas unas condiciones iniciales de la posición y velocidad, existe y es única.

Ahora pensemos en una condición adicional al principio de determinismo. Aristoteles postuló similarmente a Newton una Segunda Ley, sin embargo solo dependía de la posición de la partícula.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}F(t,x)$$

esto dado a que el le parecía que el movimiento se disipaba, sin contar a este disipamiento como otra interacción. Además de ser incorrecta dadas la dependecnia con las traslaciones, contenía estabilidades asintóticas, las cuales son un obstaculo para tener en una teoría física por las siguientes razones. Para todo nivel arbitrario de precisión en la medición de una variable de control existe un nivel arbitrario de precisión en la variable dependiente. Veáse la definición de continuidad de una función. Sin embargo esta garantía es para un momento dado en el tiempo, sería un inconveniente que no se preservará en el tiempo dado que por ejemplo en el caso de la estabilidad asintotica existirá un momento en el cuál la incertidumbre de nuestro experimento acepte muchos pasados inequívocamente.

### 2.1. Dinámica reversible

Por lo cuál para hablar de la dinámica de sistemas reversibles, una condición adicional para el determinismo, debemos hacer que se conserve este nivel arbitrario de precisión a lo largo del tiempo. Esto es que la densidad de estados se conserve a lo largo del tiempo. El objeto necesario es la forma de volumen asociada al sistema. Así el requisito es equivalente a decir

$$L_{X_H}w = 0.$$

Para que esta forma logre ser independiente de las coordenadas, esto es que sea bien definida, debemos tomar propiedades intrínsecas de  $Q$ . Sin embargo recordemos que nuestro campo vectorial esta definido sobre el espacio fase, así que debemos hallar una manera de trasladar estas propiedades de  $Q$  a  $T^*Q$ .

### 2.2. 1-forma tautologica

Pensemos en una 1-forma ordinaria en  $Q$  i.e alguna  $\alpha \in T_p^*Q$  podemos hacer que coma vectores tangentes de nuestro espacio fase atra ves del pushforward de la

$\pi$ , dado  $\pi_* : T(T^*Q) \rightarrow TQ$  de modo que si lo colocamos en la 1-forma

$$\alpha \circ \pi_* = \pi^*\alpha.$$

Para conseguir una dos forma basta con aplicar la diferenciación exterior

$$\omega = -\pi^*d\alpha.$$

Dado que el pullback entra y sale libremente de la diferencial exterior, su forma local es igual a la original esto es  $\omega^2 = dq \wedge p = dq^i \wedge dp_i$ .

Veamos las características de ésta forma. Primero que es cerrada

$$d(\pi^*d\alpha) = \pi^*d^2\alpha = 0$$

. Supongamos que la dos forma es degenerada, esto es que  $\exists \xi \neq 0 \in T(T^*Q) \forall v \in T(T^*Q) \omega(\xi, v) = 0$  sigamos hasta llegar a una contradicción

$$\omega(\xi, v) = 0$$

Recordemos que esta dos forma nos da la suma de las areas proyectadas en cada par de ejes posición momento. Entonces si existe una  $\xi$  tal que siempre las areas sumen cero para todo vector  $v$ , entonces el primero es colineal a todo vector, esto es que todo el espacio sea de dimensión 1 lo cuál no es verdad.

Notemos que  $w = \omega^n$ , esto nos lleva al siguiente resultado

**Teorema 2.1.** Si  $L_{X_H}\omega^n = 0$  entonces  $L_{X_H}\omega = 0$

**Dem. 2.1.1.** Esto es equivalente a decir que  $g^{t*}\omega^n = \omega^n$  por la definición de derivada de Lie, donde  $g^t = \exp(tX_H)$ . Sin embargo el pullback es distributivo sobre el producto exterior tenemos entonces

$$\begin{aligned} (g^{t*})\omega^n &= \wedge^n g^{t*}\omega \\ \implies \wedge^n (g^{t*}\omega - \omega) &= 0 \\ \implies g^{t*}\omega &= \omega. \end{aligned}$$

Observemos que el hecho de que

$$L_{X_H}\omega = 0$$

quiere decir por conmutatividad de la derivada exterior y la derivada de Lie que

$$L_{X_H}d\alpha = d(L_{X_H}\omega) = 0$$

por el lemma de Poincaré tenemos que

$$L_{X_H}\alpha = dL \tag{1}$$

para alguna función  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 2.3. Geometría Simpléctica

**Definición 2.1.** Una geometría simpléctica es un par  $(M, \omega)$  de una variedad y una dos forma diferencial cerrada y no degenerada.

Examinemos un poco ésta dos forma diferencial, observemos que podemos obtener una uno forma de ella dejando libre una casilla de su entrada

$$\omega^2(X, \cdot) \in T^*M$$

siendo  $M = T^*Q$  el espacio fase, y  $X : M \rightarrow TM$ . Esta reducción de orden através de una evaluación es una aplicación continua e inclusive diferenciable, la cuál podemos definir como tal. El producto interior esta aplicación, y se escribe como

$$i_X \omega = \omega(X, \cdot)$$

Aunque no todas las 1-formas son diferenciales de funciones, pensemos que éste sea el caso. Si  $X_H$  es el campo vectorial que describe a nuestro sistema, localmente se ve así

$$X_H = \dot{q}^i \partial_{q^i} + \dot{p}_i \partial_{p_i} \quad (2)$$

pensemos en su 1-forma canónicamente asociada

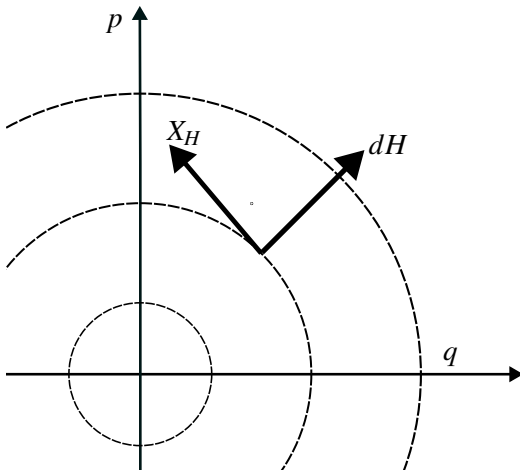
$$i_{X_H} \omega = dH \quad (3)$$

dado a que  $\omega^2$  es no degenerada para todo producto interior con algún campo vectorial obtendremos inequívocamente una 1-forma o un diferencial de función. Llamaremos a esta función única asociada a este sistema un hamiltoniano, lo que podemos interpretar de (3) es que este observable es conocido únicamente en sus diferencias.

En una localidad de la variedad en coordenadas de Darboux tenemos que

$$\omega(\partial_{q^i}, \partial_{q^j}) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

donde  $I$  es la matriz identidad.



La aplicación de la forma canónica en forma local

Examinemos un poco más a la función, conocemos la formula de homotopia de Cartan para cualquier k forma  $\alpha$

$$L_{X_H} \alpha = d(i_{X_H} \alpha) + i_{X_H} d\alpha$$

donde la derivada de Lie de una 1-forma ésta definida como

$$(L_{X_H} \alpha)(\xi) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp(X_H))^* \omega$$

. Tomemos (3) y usemos esta identidad

$$\begin{aligned} dH &= i_{X_H} \omega \\ &= -i_{X_H} d\alpha \\ &= -L_{X_H} \omega + d(i_{X_H} \omega). \end{aligned}$$

Calculemos individualmente los términos en sus formas locales

$$\begin{aligned} i_{X_H} \alpha &= i_{X_H} p_i dq^i \\ &= p_i dq^i(X_H) = p_i dq^i(\dot{q}^j \partial_{q^j} + \dot{p}_j \partial_{p_j}) \\ &= p_i dq^i(\dot{q}^j \frac{\partial}{\partial q^j}) \\ &= p_i \dot{q}^j \delta^{ij} \\ &= p_i \dot{q}^i \implies d(i_{X_H} \alpha) = \dot{q}^i dp_i + p_i d\dot{q}^i. \end{aligned}$$

Para el segundo término

$$\begin{aligned} L_{X_H} \alpha &= L_{X_H} p_i dq^i \\ &= (L_{X_H} p_i) dq^i + p_i L_{X_H} dq^i \end{aligned}$$

Evaluando por separado tenemos

$$\begin{aligned} L_{X_H} p_i &= \dot{q}^j \partial_{q^j} p_i + \dot{p}_j \partial_{p_j} p_i \\ &= 0 + \dot{p}_j \delta^{ij} = \dot{p}^i \end{aligned}$$

por la forma local de la derivada de Lie de una uno forma tenemos

$$\begin{aligned} L_{X_H} dq^i &= \partial_j X_H^i dq^j \\ &= \partial_j \dot{q}^i dq^j \\ &= d\dot{q}^i. \end{aligned}$$

Obtenemos entonces

$$L_{X_H} \alpha = \dot{p}_i dq^i + p_i d\dot{q}^i. \quad (4)$$

concluimos que

$$\begin{aligned} dH &= p_i d\dot{q}^i + \dot{q}^i dp_i - \dot{p}_i dq^i - p_i d\dot{q}^i \\ &= \dot{q}^i dp_i - \dot{p}_i dq^i. \end{aligned}$$

A sabiendas de que  $dH = \partial_{p_i} H dp_i + \partial_{q^i} H dq^i$  igualamos diferenciales y obtenemos las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (5)$$

Evidentemente había una manera mucho mas directa de deducir estas ecuaciones evaluando el campo vectorial con la dos forma localmente. Sin embargo esta deducción nos permite entrever la forma de nuestra función hamiltoneana

$$dH = d(p_i \dot{q}^i) - dL$$

Nuestro Hamiltoniano admite ser

$$H = p_i \dot{q}^i - L \quad (6)$$

para hallar la forma de nuestro hamiltoneano debemos ver Si comparamos la ecuación (1) y (4) tenemos entonces que

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i \\ &= \dot{p}_i dq^i + p_i d\dot{q}^i \\ \implies \dot{p}_i &= \frac{\partial L}{\partial q^i} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \end{aligned}$$

y de aquí recuperamos las ecuaciones de Euler Lagrange

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \frac{dp_i}{dt} \\ \implies \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) &= \frac{\partial L}{\partial q^i} \quad (7) \end{aligned}$$

apriori no hay razón para suponer que nuestro sistema dé preferencia a configuración alguna, estas observables canónicas no tienen porque tampoco, de ese modo estaríamos sujetos a las cartas también. Así mismo tampoco hay razón para suponer que de preferencia a algún vector tangente en cada espacio tangente, estaríamos sujetos a las bases de los mismos. Lo más sensato es que estas observables dependan unicamente del modulo de la velocidad, una observable independiente de las bases y las cartas. Observamos también que la ecuacion es invariante a algun producto escalar, este será nuestro parametro  $m$ , entonces

$$L = \frac{m}{2} \|\dot{q}\|^2 = \frac{1}{2} m g_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k \quad (8)$$

donde el modulo esta dado por la metrica del espacio de configuración. Así sustituyendo en (??) tenemos

$$\begin{aligned} H &= p_i \dot{q}^i - \frac{1}{2} m g_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k = \frac{1}{m} p_i g^{ik} p_k - \frac{1}{2m} g^{ik} p_i p_k \\ H &= \frac{1}{2m} g^{ik} p_i p_k \quad (9) \end{aligned}$$

éste es el hamiltoneano admitido para una partícula libre.

## 2.4. Teorema de Conservación

La sección anterior sugirió que existen unos campos vectoriales privilegiados, en esta sección veremos cuan importantes son

**Definición 2.2.** *Un campo vectorial se dice campo hamiltoneano si existe una observable  $F : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  canonicamente asociada i.e*

$$i_{X_F} \omega = dF$$

a su observable se le llama observable hamiltoneana

Pensemos en la derivada Lie de una observable  $F : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  arbitraria respecto a nuestro campo vectorial hamiltoneano, la siguiente propiedad se cumple

$$L_{X_H} F = i_{X_H} dF$$

Sin embargo si  $F$  es hamiltoneano, podemos pensar en que existe una  $X_F$  tal que  $i_{X_F} \omega = dF$  sustituimos en la expresión anterior y tenemos

$$L_{X_H} f = i_{X_H} i_{X_F} \omega = \omega(X_F, X_H) = -\omega(X_H, X_F).$$

La forma canónica nos da una manera de conseguir otra función por medio de otras dos,  $\{H, F\} = -\omega(X_H, X_F)$  y lo denominamos braquete de Poisson. Similarmente podemos definir unos corchetes de Lie

$$[X_H, X_F] = L_{X_H} L_{X_F} - L_{X_F} L_{X_H}$$

. Nos damos cuenta de que satsiface una Algebra de Lie. Tenemos el siguiente teorema

**Teorema 2.2.** *Sean  $H$  y  $F$  dos observables hamiltoneanas*

1. **Conservación de la Energía  $H$**  es conservada a lo largo del flujo de  $X_H$ .
2. **Cantidad Conservada  $F$**  es conservada si

$$\{H, F\} = 0 \quad (10)$$

**Dem. 2.2.1.** *La definición de conservación de una observable es equivalente a decir que  $L_{X_H}$  sobre la observable es nulo. Veamos*

$$L_{X_H} H = i_{X_H} dH = i_{X_H} i_{X_H} \omega = \omega(X_H, X_H) = 0$$

por anti simetría de la forma canónica. También

$$L_{X_H} F = -\omega(X_H, X_F) = \{X_H, X_F\} = 0.$$

### 3. Ejemplo

#### 3.1. Campo magnético

Consideremos el caso de una partícula expuesta a un campo magnético. El campo magnético  $B$  no realiza ningún trabajo sobre la partícula, entonces cómo es que interacciona de ella. Veremos que es afectando la estructura simpléctica. Pues el campo magnético esta definido como un flujo, de modo que necesariamente es una dos forma que habita en  $\Omega^2(T^*Q)$ , eso quiere decir que podemos operarla junto a nuestra dos forma

$$\omega_{eB} = \omega + eB$$

esta aplicación nos da otra dos forma no degenerada y cerrada. Volvamos a nuestro campo vectorial (2), si evaluamos  $i_{X_H}\omega_{eB}$  obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones hamiltonianas

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\dot{p}_i + \varepsilon^{ijk}B_j\dot{p}_k \quad (11)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i \quad (12)$$

Las cuales poseen otra definición para sus braquetes de Poisson

$$\{H, F\}_{eB} = (\omega + eB)(X_H, X_F).$$

Su forma en una carta es la siguiente

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} + eBdq^i \wedge dq^j (X_H, X_Q) = \\ & = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} + \varepsilon^{ijk}eB_i \frac{\partial Q}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial p_k} = \\ & = \frac{\partial F}{\partial q^i} \left( \frac{1}{2m} g^{ik} p_k \right) - \left( \frac{1}{2m} \frac{\partial g^{ik}(q)}{\partial q^i} \right) \frac{\partial F}{\partial p_i} + \\ & + \varepsilon^{ijk}eB_i \frac{\partial Q}{\partial p_j} \frac{1}{2m} g^{ik} p_i = \end{aligned}$$

#### 3.2. En un toro

Consideremos el Hamiltoniano de nuestra partícula libre sobre el toroide con el siguiente elemento de línea

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + (b + a \sin \theta)^2 d\phi^2$$

por simplicidad supongamos  $a = 1$  y  $b = 1$ , entonces su hamiltoniano libre es

$$H = \frac{1}{2m} (p_\theta^2 + (1 + \sin \theta)^2 p_\phi^2) \quad (13)$$

El campo magnético en estas coordendas es la siguiente dos forma de flujo

$$\vec{B} = Ba^2(1 + \sin \theta)d\theta \wedge d\phi \quad (14)$$

done  $B$  es una constante. Nuestro sistema de ecuaciones dado es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} \\ \dot{p}_\theta &= -eB \sin \theta \dot{p}_\phi - \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ \dot{p}_\phi &= -eB \sin \theta \dot{p}_\theta - \frac{\partial H}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

#### 3.3. Algoritmo de Van Holten

El método de Van Holten nos da un proceso sistemático para hallar simetrías de un sistema mecánico. Por el teorema de Arnold -Liouville sabemos que si conocemos la misma cantidad de primeras integrales que de grados de libertad el problema es cuadro integrable. Esto es resoluble en terminos de una serie de operaciones finitas algebraicas.

La primera cantidad conservada que poseemos es el modulo de la velocidad de la partícula, esto es porque al no ejercer trabajo alguno sobre la partícula, la energía cinética no se ve afectada y por tanto el modulo de la velocidad se ve inalterado. Del resultado de cantidades conservadas sabemos que si  $F$  es una primera integral, se cumple lo siguiente

$$\{F, H\} = 0$$

el metodo nos sugiere que supongamos que  $F$  es expandible en una serie de términos

$$F = C + C^i(q)p_i + C^{n_i n_j}(q)p_{n_i}p_{n_j} + \dots$$

Al evaluar la condición (10) sobre esta expansión igualamos coeficientes y tenemos:

$$D_i C = \nabla_i C = qF_{ij}C^j, \quad (15)$$

$$D_i C_j + D_j C_i = qF_{ik}C^k_j + qF_{jk}C^k_i, \quad (16)$$

$$\dots \quad (17)$$

dadas estas restricciones, podemos decir que se trunca finita si  $C$  corresponde a un tensor de killing. Puesto que todos los coeficientes siguientes se vuelven cero.

El vector de Killing o isometría del toro es el siguiente

$$c^\phi \partial_\phi + c^\theta \partial_\theta = (1 + \sin \theta)^2 \partial_\phi$$

esto es  $c^\phi = (1 + \sin \theta)^2$  y  $c^\theta = 0$  y es único, vemos que corresponde a la rotación respecto al eje azimutal. Las condiciones de Van Horten nos dan dos ecuaciones

$$B(1 + \sin \theta)^3 = \partial_\theta C$$

$$-B(1 + \sin \theta)c^\theta = \partial_\phi C.$$

De la primera tenemos que

$$C = \psi(\phi) + f(\theta)$$

donde  $f(\theta) = \int B(1 + \sin \theta)^3 d\theta$  y  $\psi(\phi)$  es una función incógnita, aplicamos la segunda sobre esto y tenemos

$$\partial_\phi \psi(\phi) = 0 \implies \psi(\phi) = cte$$

resolviendo  $f$  tenemos que

$$f = \frac{5\theta}{2} - \frac{15}{4} \cos \theta + \frac{1}{12} \cos 3\theta - \frac{3}{4} \sin 2\theta.$$

Por tanto la cantidad conservada es

$$J = eB \left( \frac{5\theta}{2} - \frac{15}{4} \cos \theta + \frac{1}{12} \cos 3\theta - \frac{3}{4} \sin 2\theta \right) + (1 + \sin \theta)^2 p_\phi.$$

como el módulo de la velocidad y esta cantidad están en involución, entonces el sistema es integrable en el sentido de Arnold- Liouville.